無限テンソル積作用素の極分解 (無限次元空間のテンソル積)

中神, 祥臣

数理解析研究所講究録
228巻 1975年 101-111

無限テンソル積作用素の極分解

東工大 理　中神祥臣

§1. 序論. 応用上必ずしも有界でない　作用素の無限テンソル積が必要となる. ここでは閉作用素 x_ι の無限テンソル積を $\otimes^{c}\mathcal{H}_\iota$ から $\otimes^{c'}\mathcal{H}_\iota$ への閉作用素として定義し, 幾つかの応用を試みる. 以下次のような記号と規約を使う.

I : 添字集合(無限)　; $\iota, \kappa \in I$

$J \subset\subset I \Leftrightarrow J$ は I の有限部分集合

$\mathcal{H}_\iota$: $\{0\}$ でないヒルベルト空間　; $\xi_\iota, \eta_\iota \in I$

x_ι : 稠密な定義域 $D(x_\iota)$ を持つ $\mathcal{H}_\iota$ 上の閉作用素

M_ι : $\mathcal{H}_\iota$ 上の作用素環

S : $\sum \big| \|\xi_\iota\| - 1 \big| < \infty$ なる $(\xi_\iota) \in \prod \mathcal{H}_\iota$ 全体

S_0 : $0 < \prod \|\xi_\iota\| < \infty$ なる $(\xi_\iota) \in \prod \mathcal{H}_\iota$ 全体

$(\xi_\iota) \sim (\eta_\iota) \Leftrightarrow \sum |(\xi_\iota|\eta_\iota) - 1| < \infty$

$(\xi_\iota) \underset{w}{\sim} (\eta_\iota) \Leftrightarrow \sum \big| |(\xi_\iota|\eta_\iota)| - 1 \big| < \infty$

$(\xi_\iota) \underset{u}{\sim} (\eta_\iota) \Leftrightarrow$ 或るユニタリー作用素 $u_\iota \in M_\iota'$ が存在して

$(\xi_\iota) \sim (u_\iota \eta_\iota)$

$(\xi_\iota) \underset{p}{\sim} (\eta_\iota) \Leftrightarrow$ ある半等距離作用素 $v_\iota \in M_\iota'$ が存在して

$(\xi_\iota) \sim (v_\iota \eta_\iota)$

$(\xi_\iota) \underset{c}{\sim} (\eta_\iota) \Leftrightarrow$ あるユニタリー作用素 $c_\iota \in M_\iota \cap M_\iota'$ が存在して $(\xi_\iota) \sim (c_\iota \eta_\iota)$

$C \equiv S/\sim$, $C_0 \equiv S_0/\underset{w}{\sim}$; $c \in C$ $c \in C_0$

$c(\xi_\iota) \in C$: (ξ_ι)を代表元としてもつもの

$c(\xi_\iota) \underset{\alpha}{\sim} c(\eta_\iota) \Leftrightarrow (\xi_\iota) \underset{\alpha}{\sim} (\eta_\iota)$, ここで $\underset{\alpha}{\sim}$ は $\sim$, $\underset{w}{\sim}$, $\underset{u}{\sim}$, $\underset{p}{\sim}$ または $\underset{c}{\sim}$.

$\otimes \mathcal{H}_\iota$: 完全無限テンソル積

$\mathcal{H}_c \equiv \otimes^c \mathcal{H}_\iota \equiv \otimes(\mathcal{H}_\iota, \xi_\iota)$: 不完全無限テンソル積

π_ι : $x \in M_\iota \longmapsto x \otimes 1$: $\mathcal{H}_\iota \otimes (\otimes_{I \setminus \{\iota\}} \mathcal{H}_\kappa)$ 上の表現

$\otimes M_\iota \equiv (\bigvee \pi_\iota(M_\iota))''$

$\otimes^c M_\iota \equiv \otimes(M_\iota, \xi_\iota)$: $\otimes M_\iota$ の $\mathcal{H}_c$ への制限

p_c : $\otimes \mathcal{H}_\iota$ から $\mathcal{H}_c$ への射影 ; $p_c \in (\otimes M_\iota)'$

$p(c)$: p_c の $(\otimes M_\iota)'$ の中心での台

§2. 閉作用素の無限テンソル積　x_ιは稠密な定義域 $D(x_\iota)$ を持つ $\mathcal{H}_\iota$ 上の閉作用素とする.

定義. $(\xi_{0\iota}, \eta_{0\iota})$ が (x_ι) の *non-zero reference pair* とは

i) $(\xi_{0\iota}) \in S_0$, $(\eta_{0\iota}) \in S_0$

ii) $\xi_{0\iota} \in D(x_\iota)$, $(x_\iota \xi_{0\iota}) \in S$

iii) $(x_\iota \xi_{0\iota}) \sim (\eta_{0\iota})$

iv) $\eta_{0\iota} \in D(x_\iota^*)$, $(x_\iota^* \eta_{0\iota}) \in S$

が成りたつことである.

いま定義の条件 i), ii), iii) を仮定してみる. $\xi_\iota \in D(x_\iota)$, $\iota \in I$ かつ有限個の ι を除いて $\xi_\iota = \xi_{0\iota}$ をみたす $\otimes \xi_\iota$ の全体に対し写像 $\otimes \xi_\iota \longmapsto \otimes x_\iota \xi_\iota$ は $\mathfrak{H}_c$, $c \equiv c(\xi_{0\iota})$ で稠密な定義域をもち, $\mathfrak{H}_{c'}$, $c' \equiv c(\eta_{0\iota})$ に値を取る線型写像 $\odot(x_\iota, \xi_{0\iota})$ へ代数的に拡張される. 条件(iv) はこの $\odot(x_\iota, \xi_{0\iota})$ が閉拡大をもつための1つの完全条件になっている. 条件(i), (ii), (iii) をみたすが(iv) をみたさないような $(\xi_{0\iota})$, $(\eta_{0\iota})$ の対も作ることができる. 閉拡大が在る場合, それを $\otimes^{c'c} x_\iota$ と表わす. 特に $c'=c$ の場合には $\otimes^{c} x_\iota$ と表わす.

定理1. x_ι を正値, 自己共役とする. $(\xi_{0\iota}, \eta_{0\iota})$ が (x_ι) の non-zero reference pair ならば, $(\xi_{0\iota}) \sim (\eta_{0\iota})$ かつ $\otimes^{c} x_\iota$ は $\mathfrak{H}_c$ 上で自己共役である.

定理2. x_ι の極分解を $u_\iota |x_\iota|$ とすれば, $\otimes^{c'c} x_\iota = (\otimes^{c'c} u_\iota)(\otimes^{c} |x_\iota|)$ となり極分解になっている.

定理3. $(\otimes^{c'c} x_\iota)^* = \otimes^{cc'} x_\iota^*$

定理4. $x_\iota \,\eta\, M_\iota$ ならば $\otimes^{c} x_\iota \,\eta\, \otimes^{c} M_\iota$

§3. Reference Pair の存在条件.

定理5. x_ι を可逆，正値，自己共役とし，$y_\iota \equiv \log x_\iota$ とする．e_ι を閉区間 $[\lambda_0^{-1}, \lambda_0]$ $(\lambda_0 > 1)$ に対応する x_ι のスペクトル射影とする．次の6条件は $c \in \mathcal{C}$ に対し同値である：

i) (x_ι) の non-zero reference pair $(\zeta_{0\iota}, \zeta_{0\iota})$, $c = c(\zeta_{0\iota})$ がある；

ii) 全ての又は或る $(\zeta_\iota) \in c$ に対し，$(e_\iota \zeta_\iota) \in S$, $(x_\iota e_\iota \zeta_\iota) \in S$, $(e_\iota \zeta_\iota) \sim (x_\iota e_\iota \zeta_\iota)$；

iii) 全ての $(\zeta_\iota) \in C$ に対し，$(e_\iota \zeta_\iota) \in S$, $\Sigma \| y_\iota e_\iota \zeta_\iota \|^2 < \infty$, $\Sigma |(y_\iota e_\iota \zeta_\iota | \zeta_\iota)| < \infty$；

iv) 或る $(\zeta_\iota) \in c$ に対し，$\zeta_\iota \in D(y_\iota)$, $\Sigma \| y_\iota \zeta_\iota \|^2 < \infty$, $\Sigma |(y_\iota \zeta_\iota | \zeta_\iota)| < \infty$；

v) $\otimes^c x_\iota^{it}$ は1径数ユニタリー群，$t \in \mathbb{R}$；

vi) 全ての又は或る $(\zeta_\iota) \in c$ と全ての $t \in \mathbb{R}$ に対し $(\zeta_\iota) \sim (x_\iota^{it} \zeta_\iota)$.

ここで注意したいことは，これらの条件はどれも，独立な確率変数の無限和が確率収束するための条件の云い換えになっている．とりわけ条件(iii)は Kolmogorov の3級数定理であり，条件(v)は確率変数の特性関数の無限積が再び特性関数になると云うことである．さらに条件(i)の下で，(y_ι) は Reed が定義した意味での strong convergence vector $\otimes \zeta_{1\iota}$, $c = c(\zeta_{1\iota})$ を持っている．

注意6. $\lambda_\iota>0$ $(\lambda_\iota\in\mathbb{R})$とする. 定理5で条件(i), (ii), (v)のx_ιの代りに$\lambda_\iota x_\iota$, 条件(iii), (iv)ではy_ιの代りに$y_\iota+\log\lambda_\iota$, 条件(vii)では$\sim$の代りに$\widetilde{\widetilde{w}}$を使ってもよい. このとき$\log\lambda_\iota$は$y_\iota$に対する繰り込み定数と解釈できる. λ_ιをM_ι'又はその中心の可逆, 正値, 自己共役な元としても条件(i)〜(v)の間の同値性は成りたつ. そのとき(vi)の$\widetilde{\widetilde{w}}$を$\widetilde{u}$, $\widetilde{c}$に代えると条件(i)〜(v)は条件(vi)に対する十分条件になっている. $\widetilde{c}$については§7の定理14で触れる.

定理7. $\otimes^c x_\iota^* x_\iota=(\otimes^{c'c}x_\iota)^*(\otimes^{c'c}x_\iota)$

定理8. $(\otimes^c x_\iota)^{it}=\otimes^c x_\iota^{it}$ 特に$(\otimes^c x_\iota)^z=\otimes^c x_\iota^z$が全ての$z\in\mathbb{C}$で成りたつ.

この定理の下で次のことに注意しよう. $y_\iota\equiv\log x_\iota$かつ$\pi_\iota^c(y_\iota)\equiv\pi_\iota(y_\iota)\restriction\mathcal{H}_c$とすれば

$$\log\otimes^c x_\iota=\sum\pi_\iota^c(y_\iota)$$

となる. たゞし右辺は定理8の式の右辺を$t=0$で微分して得られる, Streitが定義した非有界作用素の和である.

§4. モジュラー作用素の無限テンソル積

左ヒルベルト環$\mathfrak{A}_\iota$の完備化を$\mathcal{H}_\iota$とする. $\mathfrak{A}_\iota$は規格化された元$\xi_{0\iota}$をもち$\xi_{0\iota}=\xi_{0\iota}^2=\xi_{0\iota}^\#$をみたしているものとす

る．$\xi_\iota \in \mathfrak{A}_\iota$，$\iota \in I$ かつ有限個の ι を除いて $\xi_\iota = \xi_{0\iota}$ なる $\otimes \xi_\iota$ 全体の線形拡大を $\odot(\mathfrak{A}_\iota, \xi_{0\iota})$ と表わす．これには自然に＃－演算と積が定義できてたヒルベルト環になる．$\mathfrak{A}_\iota$ 上の＃演算 S_ι と $c \equiv c(\xi_{0\iota})$ に対し $\otimes^c \Delta_\iota = (\otimes^c S_\iota^*)(\otimes^c \overline{S_\iota})$ が $\mathcal{H}_c$ 上で成りたっている．このことから直ちに

系 9．$\omega_\iota \equiv \omega_{\xi_{0\iota}}$，$c \equiv c(\xi_{0\iota})$ かつ $\otimes^c M_\iota$ 上で $\omega \equiv \otimes \omega_\iota$ とすれば，$\otimes^c M_\iota$ 上の自己同型写像 $\otimes^c \sigma_t^{\omega_\iota}$ が定義でき，$\sigma_t^\omega = \otimes^c \sigma_t^{\omega_\iota}$ となる．

§5．σ－有限測度の無限積

当節では I は可算とする．$(\Omega_\iota, \mathfrak{F}_\iota, \nu_\iota)$，$\iota \in I$ を確率空間とする．$(\Omega, \mathfrak{F}) \equiv \prod(\Omega_\iota, \mathfrak{F}_\iota)$，$\nu \equiv \prod \nu_\iota$，$\mathcal{H}_\iota \equiv L^2(\Omega_\iota, \mathfrak{F}_\iota, \nu_\iota)$ かつ $Z_\iota \equiv L^\infty(\Omega_\iota, \mathfrak{F}_\iota, \nu_\iota)$ とする．$(\Omega, \mathfrak{F}, \nu)$ は確率空間になる．$\mathcal{H}_\iota \cap Z_\iota$ の元 ξ を Z_ι の元と見るときには $\pi_\iota(\xi)$ と表わす．$\eta \in \mathcal{H}_\iota$ に対し ω_η を $\omega_\eta(x) \equiv (x\eta|\eta)$，$x \in Z_\iota$ で定義する．

μ_ι を $(\Omega_\iota, \mathfrak{F}_\iota)$ 上で ν_ι に関して絶対連続な σ－有限測度とし，$h_\iota \equiv d\mu_\iota/d\nu_\iota$ とする．$\xi_\iota \in D(h_\iota^{1/2})$ かつ $h_\iota^{1/2}\xi_\iota \neq 0$ に対しそれぞれを規格化したものを $\xi_{0\iota}$，$\eta_{0\iota}$ とすれば，$\omega_{\eta_{0\iota}}$ は Ω_ι 上で ν_ι に関して絶対連続である．そこですべての $J \subset\subset I$ に対し Ω 上の σ－有限測度 μ_J を

$$\mu_J \equiv (\bigotimes_J \| h_\iota^{1/2} \xi_\iota \|^2 \mu_\iota) \otimes (\bigotimes_{I \setminus J} \omega_{\eta_{0\iota}})$$

で定義する．勿論 μ_J は $\otimes^{c'} M_\iota$, $c' \underset{u}{\sim} c(\eta_{0\iota})$ 上の半有限型で正規なトレースである．

命題10. $0 < \prod \|\pi(\xi_\iota)\| < \infty$ かつ $\mu_\iota \ll \nu_\iota$ とする．もし $(\eta_{0\iota};\eta_{0\iota})$ が $(\pi(\xi_\iota))$ の non-zero reference pair ならば

$$\mu \equiv \sup_{J \subset\subset I} \mu_J$$

は Ω 上の σ-有限測度である．特に $(\eta_\iota) \not\underset{u}{\sim} (\eta_{0\iota})$ ならば μ と $\otimes \omega_{\eta_\iota}$ は互に特異である．

上で定義された μ は $(\xi_\iota) \in S_0$ により定義されるので，$\mu^{(\xi_\iota)}$ と表わすことにする．

定理11. ν_ι, ν, μ_ι, h_ι を上のようにし，$\mu_\iota \sim \nu_\iota$ (又は $\mu_\iota \ll \nu_\iota$) とする．$\xi_\iota \in D(h_\iota^{1/2})$, $0 < \prod \|\pi(\xi_\iota)\| < \infty$ に対し $\xi_{0\iota}$, $\eta_{0\iota}$ を上のようにし，$h_{0\iota} \equiv \|\xi_\iota\|^2 \|h_\iota^{1/2}\xi_\iota\|^{-2} h_\iota$ とする．$(\eta_{0\iota}, \eta_{0\iota})$ が $(\pi(\xi_\iota))$ の non-zero reference pair ならば，次の3条件は同値である：

i) $\mu^{(\xi_\iota)} \sim \nu$ (又は $\mu^{(\xi_\iota)} \ll \nu$)；

ii) $(\xi_\iota) \in S$ かつ (ξ_ι, ξ_ι) は $(h_{0\iota}^{1/2})$ の non-zero reference pair；

iii) $(\xi_\iota) \in S$ かつ $(\xi_\iota) \sim (h_{0\iota}^{1/2}\xi_\iota)$。

ここで注意すべきことは条件(iii)は Hill の条件である．

§6 半有限型重みの無限テンソル積

$\xi_\iota \in \mathcal{H}_\iota$ を M_ι に対し分離かつ巡回的な単位ベクトル，M_ι 上で $\phi_\iota \equiv \omega_{\xi_\iota}$，$h_\iota \eta M_\iota$ を可逆，正値な自己共役作用素，ψ_ι を $(M_\iota)_+$ 上の半有限型，忠実，正規な重みで $\psi_\iota = h_\iota^{1/2}\phi_\iota h_\iota^{1/2}$，$\mathfrak{m}_\iota \equiv \{x \in M_\iota : \psi_\iota(x^*x) < \infty\}$ とする．$e_\iota(n)$ を閉区間 $[0, n]$，$n \in \mathbb{N}$ に対応する h_ι のスペクトル射影とする．J_{ξ_ι}，Δ_{ξ_ι} をそれぞれ ϕ_ι から導かれるモジュラー共役作用素，モジュラー作用素とする．$x \in M_\iota$ に対し $j_{\xi_\iota}(x) \equiv J_{\xi_\iota} x J_{\xi_\iota}$ とおく．$x \in \mathfrak{m}_\iota$ に対し $x h_\iota^{1/2} e_\iota(n)\xi_\iota = j_{\xi_\iota}(h_\iota^{1/2} e_\iota(n)) x \xi_\iota$ となる．$\{e_\iota(n+1) - e_\iota(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は直交し，しかも $\sup_n \| j_{\xi_\iota}(h_\iota^{1/2} e_\iota(n)) x \xi_\iota \|^2 \leqq \psi_\iota(x^*x) < \infty$ であるから，$\{x h_\iota^{1/2} e_\iota(n)\xi_\iota\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列である．この極限 $j_{\xi_\iota}(h_\iota^{1/2}) x \xi_\iota$ を形式的に $x h_\iota^{1/2} \xi_\iota$ と書く．$x_{o\iota} \in \mathfrak{m}_\iota$，$x_{o\iota} \neq 0$ に対し

$$\xi_{o\iota} \equiv \| x_{o\iota}\xi_\iota \|^{-1} x_{o\iota}\xi_\iota \quad かつ \quad \eta_{o\iota} \equiv \| x_{o\iota} h_\iota^{1/2} \xi_\iota \|^{-1} x_{o\iota} h_\iota^{1/2} \xi_\iota$$

とおく．$(\otimes^{c'} M_\iota)_+$，$c' \underset{p}{\sim} c(\eta_{o\iota})$ 上の半有限型，正規な重みを

$$\psi_J \equiv (\otimes_J \| x_{o\iota} h_\iota^{1/2} \xi_\iota \|^{-2} \psi_\iota) \otimes (\otimes_{I \setminus J}\, \omega_{\eta_{o\iota}})$$

とする．

命題 12．$0 < \prod \| x_{o\iota} \| < \infty$ とする．もし $(\eta_{o\iota}, \eta_{o\iota})$ が $(x_{o\iota})$ の *non-zero reference pair* でしかも $\| \Delta_{\psi_\iota}^{-1/2} \pi_{\psi_\iota}(x_{o\iota}) \Delta_{\psi_\iota}^{1/2} \| \leqq \| x_{o\iota} \|$ ならば

$$\psi \equiv \lim_{J \subset\subset I} \psi_J$$

は $(\otimes^{c'} M_\iota)_+$，$c' \underset{p}{\sim} c(\eta_{o\iota})$ 上の半有限型，忠実，正規な重みである．

ここで得られたψは$(x_{0\iota})$により定義されたので，$\psi^{(x_{0\iota})}$と表わすことにする．これはψ_ιの無限テンソル積の一種と解釈できる．

定理13．ξ_ι, φ_ι, ψ_ι, h_ι, $x_{0\iota}$を上のようにする．$C \equiv C(\xi_\iota)$, $C' \underset{p}{\sim} C(\eta_{0\iota})$とする．$\otimes^C M_\iota$上で$\varphi \equiv \otimes \varphi_\iota$，$\otimes^{C'} M_\iota$上で$\psi \equiv \psi^{(x_{0\iota})}$とする．

(1) $\lambda_\iota \equiv \|x_{0\iota}\xi_\iota\| \, \|x_{0\iota} h_\iota^{1/2} \xi_\iota\|^{-1}$，$h_{0\iota} \equiv \lambda_\iota^2 h_\iota$とする．$\psi$が$\otimes^C M_\iota$上の半有限型，忠実，正規な重みであるための十分条件は次の3条件のいずれか1つである：

(i) $(x_{0\iota}\xi_\iota) \in S_0$かつ$(\xi_{0\iota}) \underset{p}{\sim} (\eta_{0\iota})$；

(ii) 或る$(\xi_{1\iota}) \in C$に対し，$(\xi_{1\iota}, \xi_{1\iota})$は$(h_{0\iota}^{1/2})$の non-zero reference pair である；

(iii) $(e_\iota \xi_\iota) \in S$，$(h_{0\iota}^{1/2} e_\iota \xi_\iota) \in S$，$(e_\iota \xi_\iota) \sim (h_{0\iota}^{1/2} e_\iota \xi_\iota)$なる$h_{0\iota}$のスペクトル射影$e_\iota$がある．

(2) $x_{0\iota}$がh_ιと可換とする．(1)のすべての条件はψが$\otimes^C M_\iota$上の半有限型，忠実，正規な重みであるための必要条件である．

§7. 半有限型$\otimes^C M_\iota$

定理14．$\xi_\iota \in \mathcal{H}_\iota$を$M_\iota$に対し分離かつ巡回的な単位ベクトル，$C = C(\xi_\iota)$とする．次の4条件は同値である：

(i) $\otimes^c M_\iota$ は半有限型；

(ii) M_ι 上の任意な半有限型，忠実，正規なトレース τ'_ι に対し $(\xi_\iota) \underset{c}{\sim} ((d\tau'_\iota/d\omega_{\xi_\iota})^{it}\xi_\iota)$ （$\otimes^c \mathcal{H}_\iota$ が可分なとき）；

(iii) $\otimes^c e_\iota$ が $\otimes^c M_\iota$ で 0 でなく有限型であるような M_ι の射影 e_ι がある；

(iv) 或る半有限型，忠実，正規なトレース τ_ι が存在して $(\xi_\iota) \sim ((d\tau_\iota/d\omega_{\xi_\iota})^{it}\xi_\iota)$.

系 15. $\otimes^c \mathcal{H}_\iota$ は可分とする．半有限型の $\otimes^c M_\iota$ は有限型の $\otimes^c (M_\iota)_{e_\iota}$ と I_∞ 型因子 $B(K)$ のテンソル積である：

$$\otimes^c M_\iota \sim (\otimes^c (M_\iota)_{e_\iota}) \otimes B(K).$$

§8. CCRのテンソル積表現　$\mathbb{C}^I$ は複素ベクトル空間になる．$\mathcal{H}_\iota$ 上の可逆，正規，自己共役な x_ι に対し，2つの試料関数空間 $V(x_\iota, c)$ と $V_w(x_\iota, c)$ を考える．前者は $(x_\iota^{f_\iota})$ が c に non-zero reference pair を持つような $f \equiv (f_\iota) \in \mathbb{C}^I$ 全体であり，後者は或る $(\lambda_\iota) \in (\mathbb{R}^*_+)^I$ が存在して $(\lambda_\iota x_\iota^{f_\iota})$ が上と同様な条件をみたす f 全体である．$V(x_\iota, c)$ は Streit の意味での試料関数空間である．有限個の ι を除いたところが 0 である $(f_\iota) \in \mathbb{C}^I$ 全体を C_0 とする．$U_\iota(s) \equiv e^{is\phi_\iota}$, $V_\iota(t) \equiv e^{it\pi_\iota}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ を $\mathcal{H}_\iota$ 上で $U_\iota(s)V_\iota(t) = e^{-ist}V_\iota(t)U_\iota(s)$ を満たす既約ユニタリー表現とし，s, t を $\mathbb{C}$ まで許すこと

にする. c_0 の元 $f\equiv(f_\iota)$, $g\equiv(g_\iota)$ に対し

$$U(f)\equiv\otimes^c U_\iota(f_\iota) \qquad V(g)\equiv\otimes^c V_\iota(g_\iota)$$

とすれば交換関係 $U(f)V(g)=e^{-i(f|g)}V(g)U(f)$ が成り立つ. この U, V の admissible 試料関数空間を $V_\phi(c)$, $V_\pi(c)$ とする. $V_\phi(c)$ の元 $\hat{f}$ の代表元 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ に対し，つまり，すべての $\lambda\in\mathbb{R}$ で $s\text{-}\lim U(\lambda f_n)$ が存在し然も $\lambda\in\mathbb{R}$ に関し強連続な $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset c_0$ に対しては交換関係により $f\equiv\sigma(c_0^*, c_0)\text{-}\lim f_n$ が存在するので, $V_\phi(c)$ の元から c_0^* への写像 σ が得られる. 同様のことが $V_\pi(c)$ の元に対しても云える.

定理 16. $f\in\sigma(V_\phi(c))$ (又は $\sigma(V_\pi(c))$) であるための1つの完全条件は $f\in V_w(e^{\phi_c}, c)$ (又は $V_w(e^{\pi_c}, c)$).

引 用 文 献

1. Elliott, G., Finite projections in tensor product von Neumann algebras. Preprint.
2. Nakagami, Y., Infinite tensor products of operators. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 10 (1974), 111−145.
3. Reents, G., On infinite direct products of continuous unitary one-parameter groups. Preprint.